ВЕКТОРНЫЕ ЗАДАЧИ НА КОМБИНАТОРНОМ МНОЖЕСТВЕ ПОЛИРАЗМЕЩЕНИЙ: УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ И ПОДХОД К РЕШЕНИЮ

Наталия Семенова

***Резюме**: Рассматривается многокритериальная задача дискретной оптимизации на комбинаторном множестве полиразмещений. Исследуются структурные свойства множеств эффективных решений. Получены необходимые и достаточные условия различных видов оптимальности решений. На основе развития идей евклидовой комбинаторной оптимизации, методов главного критерия, декомпозиции, отсекающих плоскостей Келли, релаксации разработаны и обоснованы возможные подходы для решения многокритериальной комбинаторной задачи на множестве полиразмещений..*

***Ключевые слова**: многокритериальная оптимизация, дискретная оптимизация, Парето-оптимальные, слабо, строго эффективные решения, комбинаторное множество полиразмещений.*

***ACM Classification Keywords**: G2.1 Combinatorics (F2.2), G1.6 Optimization*

Введение

Широкое распространение многокритериальных оптимизационных моделей при решении важных задач экономики, проектирования сложных систем, принятия решений в условиях неопределенности и других в последние десятилетия стимулировало внимание многих специалистов к изучению разнообразных аспектов теории векторной, в том числе дискретной, оптимизации [1-10]. Математические модели дискретной оптимизации охватывают широкий круг прикладных задач. Кроме того, ряд теоретических проблем самой математики может быть сформулирован в виде дискретных задач, поэтому все большее возрастает необходимость интенсивного развития теории и методов поиска решений задач дискретной оптимизации как неотъемлемой части научного фундамента для построения современных информационных технологий и систем. В связи с этим изучение некоторых свойств решений векторных дискретных задач, получение необходимых и достаточных условий различных видов оптимальности решений является актуальной проблемой, так как знание таких свойств и условий дает основу для разработки способов проверки оптимальности выбранного решения и построения высокоэффективных методов отыскания различных множеств эффективных решений.

В последнее время в области исследования многих классов комбинаторных моделей, разработки новых методов их решения большое внимание уделяется методам, основанным на использовании структурных свойств комбинаторных множеств [2, 8-14]. Использование информации о структуре выпуклой оболочки допустимых решений, которая является основанием для многих многогранных методов, – один из самых успешных на данный момент подходов к решению задач комбинаторной оптимизации. Но при решении таких задач возникают проблемы, связанные со сложностью математических моделей, большим объемом информации и др. На сегодняшний день в области исследования различных классов комбинаторных моделей и разработки новых методов их решения получены существенные результаты.

В данной работе формулируется и исследуется актуальная и качественно новая задача, сочетающая многокритериальность альтернатив и комбинаторные свойства полиразмещений допустимого множества.

Она продолжает и развивает исследования многокритериальных задач на комбинаторных множествах перестановок, сочетаний, представленные в работах [8, 9] и работе Л.Н. Колечкиной в этом номере журнала. На основании установленной взаимосвязи между многокритериальными задачами на комбинаторных множествах и оптимизационными задачами на непрерывном допустимом множестве в данной статье изучены некоторые структурные свойства множеств различных видов эффективных решений, а также сформулировано и доказано ряд теорем об условиях оптимальности решений рассмотренных задач. Для векторных задач на комбинаторном множестве полиразмещений предложен один из возможных подходов к их решению, основанный на развитии метода главного критерия для рассматриваемого класса задач, идеях декомпозиции, отсекающих плоскостей Келли, релаксации, и учитывающий довольно большое число ограничений.

Постановка задачи

При отображении множества полиразмещений $P_{qk}^{ns}(A,H)$ в евклидово пространство R^n сформулируем задачу $Z(F,X)$ максимизации некоторого векторного критерия $F(x)$ на множестве X, причем каждой точке $a \in P_{qk}^{ns}(A,H)$ будет соответствовать точка $x \in X$, такая, что $F(x) = \Phi(a)$.

$Z(F,X): \max\{F(x) \mid x \in X\}$, где $F(x) = (f_1(x),..., f_l(x))$, $f_i : R^n \to R^1, i \in N_l$, $X = \mathrm{vert}\,\Pi_{qk}^{ns}(A,H)$, $X \neq \varnothing$, $\Pi_{qk}^{ns}(A,H) = \mathrm{conv}\,P_{qk}^{ns}(A,H)$, $\Pi_{qk}^{ns}(A,H)$ – общий многогранник полиразмещений, построение и свойства которого описаны в работе Л.Н. Колечкиной в этой книге.

Задача $Z(F,X)$ может содержать также дополнительные линейные ограничения, образующие выпуклое многогранное множество $D \subset R^n$ вида: $D = \{x \in R^n \mid Bx \leq d\}$, где $B \in R^{m \times n}$, $d \in R^m$. Следовательно ее допустимое множество имеет вид: $X = \mathrm{vert}\,\Pi_{qk}^{ns}(A,H) \cap D$.

Под решением задачи $Z(F,X)$, как обычно, будем понимать нахождение элементов одного из следующих множеств: $P(F,X)$ - множества Парето-оптимальных (эффективных решений), $Sl(F,X)$ - оптимальных по Слейтеру (слабо эффективных) решений, $Sm(F,X)$ - оптимальных по Смейлу (строго эффективных) решений. Согласно [4, 6, 7] для каждого $x \in X$ справедливы утверждения:

$$x \in Sl(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid F(y) > F(x)\} = \varnothing, \qquad (1)$$

$$x \in P(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid F(y) \geq F(x), F(y) \neq F(x)\} = \varnothing, \qquad (2)$$

$$x \in Sm(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid y \neq x, F(y) \geq F(x)\} = \varnothing, \qquad (3)$$

$$Sm(F,X) \subset P(F,X) \subset Sl(F,X). \qquad (4)$$

Поскольку допустимая область X ограничена, то множество $P(F,X)$ не пусто и внешне устойчиво [10]. В случае бесконечного мультимножества A вопрос о существовании элементов множество $P(F,X)$ требует отдельного исследования.

Структурные свойства и условия оптимальности различных множеств эффективных решений

Использование структурных свойств комбинаторных множеств при погружении в арифметическое евклидово пространство позволяет предложить оригинальные подходы к решению соответствующих оптимизационных задач, а также повысить эффективность традиционных методов комбинаторной оптимизации.

Теорема 1. Элементы множеств $Sm(F,X)$, $P(F,X)$, $Sl(F,X)$ многокритериальной комбинаторной задачи $Z(F,X)$ находятся в вершинах многогранника $\Pi_{qk}^{ns}(A,H)$ полиразмещений.

Доказательство. Учитывая соотношение (4) между введенными множествами эффективных решений и тот факт, что множество допустимых решений X является подмножеством множества вершин общего многогранника $\Pi_{qk}^{ns}(A,H)$ полиразмещений, т. е. $x \in \operatorname{vert} \Pi_{qk}^{ns}(A,H)$, а $\Pi_{qk}^{ns}(A,H) = convP_{qk}^{ns}(A,H)$ приходим к справедливости включений: $Sm(F,X) \subset P(F,X) \subset Sl(F,X) \subset \operatorname{vert} \Pi_{qk}^{ns}(A,H)$.

Пусть функции $f_i(x), i \in N_l$, векторного критерия $F(x)$ – линейны, то есть $f_i(x) = \langle c_i, x \rangle, i \in N_l$. Структурные свойства допустимой области X и множеств разных видов эффективных решений, отмеченные в теореме 1, а также линейность функций векторного критерия позволяют свести решение задачи $Z(F,X)$ к решению задаче $Z(F,G)$ определенной на непрерывном допустимом множестве $G = \Pi_{qk}^{ns}(A,H) \bigcap D.$ Пусть $C \in R^{n \times l}$ – матрица, где c_j - ее вектор – строка, $i \in N_l$. Многогранник $\Pi_{qk}^{ns}(A,H)$ представим в виде $\Pi_{qk}^{ns}(A,H) = \{x \in R^n \left| \langle \pi_i, x \rangle \le \gamma_i, i \in N_q \right.\}$, сведя все неравенства к одному знаку $(\le)$. Введем к рассмотрению конус $K = \left\{ x \in R^n \left| Cx \ge 0 \right. \right\}$ перспективных направлений [3] задачи $Z(F,X)$ и выпуклые замкнутые конусы $0^+ \Pi(y) = \left\{ x \in R^n \left| \pi_i x \le 0, i \in N(y) \right. \right\}$, где $N(y) = \left\{ i \in N_q \left| \pi_i y = \gamma_i \right. \right\}$, которые могут быть построены для всех точек $y \in \operatorname{vert} \Pi_{qk}^{ns}(A,H)$. Очевидно, что $N(y) \ne 0$, $X \subseteq y + 0^+ \Pi(y)$. Обозначим $K_0 = \left\{ x \in R^n \left| Cx = 0 \right. \right\}$ – ядро отображения $C : R^n \to R^l$, $\operatorname{int} K = \left\{ x \in R^n \left| Cx > 0 \right. \right\}$ – внутренность конуса K. Из формул (1) - (3) следует справедливость утверждений

$$x \in Sl(C,X) \Leftrightarrow (x + \operatorname{int} K) \cap X = \varnothing, \tag{5}$$

$$x \in P(C,X) \Leftrightarrow x + (K \setminus K_0) \cap X = \varnothing \tag{6}$$

$$x \in Sm(C,X) \Leftrightarrow (x + K) \cap X \setminus \{x\} = \varnothing. \tag{7}$$

Теорема 2. $P(F,G) \bigcap \operatorname{vert} \Pi_{qk}^{ns}(A,H) \subset P(F,X)$, $Sl(F,G) \bigcap \operatorname{vert} \Pi_{qk}^{ns}(A,H) \subset Sl(F,X)$, $Sm(F,G) \bigcap \operatorname{vert} \Pi_{qk}^{ns}(A,H) \subset Sm(F,X)$.

Доказательство. Поскольку $\operatorname{vert} \Pi_{qk}^{ns}(A,H) \bigcap D \subset G$, то $P(F,G) \bigcap \operatorname{vert} \Pi_{qk}^{ns}(A,H) \bigcap D \subset P(F, G \bigcap \operatorname{vert} \Pi_{qk}^{ns}(A,H) \bigcap D) = P(F,X)$. Аналогично можно доказать соотношения $Sm(F,X) = Sm(F, D \bigcap \operatorname{vert} \Pi_{qk}^{ns}(A,H)) \supset Sm(F,G) \bigcap \operatorname{vert} \Pi_{qk}^{ns}(A,H)$ и $Sl(F,X) = Sl(F, \operatorname{vert} \Pi_{qk}^{ns}(A,H) \bigcap D) \supset Sl(F,G) \bigcap \operatorname{vert} \Pi_{qk}^{ns}(A,H)$.

Теорема 3. Если допустимое множество X задачи $Z(F,X)$ не содержит ограничений, описывающих выпуклое многогранное множество D, или $\Pi_{qk}^{ns}(A,H) \subseteq D$, то есть $X = \mathrm{vert}\,\Pi_{qk}^{ns}(A,H)$, то $\forall x \in R^n$ справедливы утверждения: $x \in Sl(F,X) \Leftrightarrow x \in Sl(F,\Pi_{qk}^{ns}(A,H)) \bigcap \mathrm{vert}\,\Pi_{qk}^{ns}(A,H),$

$x \in P(F,X) \Leftrightarrow x \in P(F,\Pi_{qk}^{ns}(A,H)) \bigcap \mathrm{vert}\,\Pi_{qk}^{ns}(A,H),$

$x \in Sm(F,X) \Leftrightarrow x \in Sm(F,\Pi_{qk}^{ns}(A,H)) \bigcap \mathrm{vert}\,\Pi_{qk}^{ns}(A,H).$

Доказательство. Учитывая условия данной теоремы и теоремы 2, следует, что $\forall\, x \in R^n$ справедливы утверждения: $x \in Sl(F,\Pi_{qk}^{ns}(A,H)) \bigcap \mathrm{vert}\,\Pi_{qk}^{ns}(A,H) \Rightarrow x \in Sl(F,X),$

$$x \in P(F,\Pi_{qk}^{ns}(A,H)) \bigcap \mathrm{vert}\,\Pi_{qk}^{ns}(A,H) \Rightarrow x \in P(F,X),$$

$$x \in Sm(F,\Pi_{qk}^{ns}(A,H)) \bigcap \mathrm{vert}\,\Pi_{qk}^{ns}(A,H) \Rightarrow x \in Sm(F,X).$$

Докажем обратные импликации. Пусть $x \in Sl(F,X),$ откуда согласно теореме 1 следует, что $x \in \mathrm{vert}\,\Pi_{qk}^{ns}(A,H)$. Предположим, от противного, что $x \notin Sl(F,\Pi_{qk}^{ns}(A,H)).$ Учитывая линейность функций $f_i(x), i \in N_l,$ векторного критерия $F(x)$ согласно теореме 5 [6] выполняется условие $\mathrm{int}\,K \bigcap (\Pi(x) - x) \neq \varnothing$, то есть в конусе $(x + \mathrm{int}\,K)$ лежат некоторые точки границы многогранника $\Pi_{qk}^{ns}(A,H)$, следовательно существует точка, которая принадлежит этому конусу. Последнее в силу формулы (5) означает, что $x \notin Sl(F,X)$ и приводит к противоречию с условием теоремы. Остальные утверждения данной теоремы доказываются аналогично этому. Доказательство завершено.

Следствие. При условиях теоремы 3 справедливы равенства $P(F,\Pi_{qk}^{ns}(A,H)) \bigcap \mathrm{vert}\,\Pi_{qk}^{ns}(A,H) =$

$= P(F,X),\ Sl(F,\Pi_{qk}^{ns}(A,H)) \bigcap \mathrm{vert}\,\Pi_{qk}^{ns}(A,H) = Sl(F,X)$,

$Sm(F,\Pi_{qk}^{ns}(A,H)) \bigcap \mathrm{vert}\,\Pi_{qk}^{ns}(A,H) = Sm(F,X)$.

Если в задаче допустимая область $X = \mathrm{vert}\,\Pi_{qk}^{ns}(A,H)$, то для любой точки $x \in \mathrm{vert}\,\Pi_{qk}^{ns}(A,H)$ справедливы необходимые и достаточные условия оптимальности всех указанных выше видов эффективных решений задачи $Z(F,X)$, полученные в работе [6].

Если допустимая область X задачи $Z(F,X)$ имеет вид $X = \mathrm{vert}\,\Pi_{qk}^{ns}(A,H) \bigcap D$ и $\Pi_{qk}^{ns}(A,H) \bigcap D \neq \Pi_{qk}^{ns}(A,H)$, то справедливые лишь достаточные условия оптимальности решений.

Теорема 4. $\forall x \in \mathrm{vert}\,\Pi_{qk}^{ns}(A,H) : x \in P(F,\Pi_{qk}^{ns}(A,H)) \bigcap D \Rightarrow x \in P(F,X),$

$x \in Sl(F,\Pi_{qk}^{ns}(A,H)) \bigcap D \Rightarrow x \in Sl(F,X)$, $x \in Sm(F,\Pi_{qk}^{ns}(A,H)) \bigcap D \Rightarrow x \in Sm(F,X)$.

Доказательство. Поскольку $G = \Pi \bigcap D,$ то $\forall x \in \mathrm{vert}\, \Pi_{qk}^{ns}(A,H)$ справедливы импликации

$x \in P(F, \Pi_{qk}^{ns}(A,H)) \bigcap D \Rightarrow x \in P(F, \Pi_{qk}^{ns}(A,H) \bigcap D) = P(F,G) \Rightarrow x \in P(F,X)$,

$x \in Sl(F, \Pi_{qk}^{ns}(A,H)) \bigcap D \Rightarrow x \in Sl(F,X)$, $x \in Sm(F, \Pi_{qk}^{ns}(A,H)) \bigcap D \Rightarrow x \in Sm(F,X)$.

Если задача $Z(F,X)$ не содержит линейных ограничений, образующих выпуклое многогранное множество $D \subset R^n$, либо $\Pi \subseteq D$, т.е. $X = \mathrm{vert}\, \Pi$, то с учетом необходимых и достаточных условий оптимальности (теорема 3) процесс ее решения сводится к поиску эффективных решений задачи $Z(F,G)$ на непрерывном допустимом множестве $G = \Pi_{qk}^{ns}(A,H)$ с последующим выбором из них лишь тех, которые являются вершинами многогранника $\Pi_{qk}^{ns}(A,H)$ полиразмещений.

Анализируя теоремы 2 и 4, приходим к соотношениям между задачами $Z(F,X)$ и $Z(F,G)$: если $x \in R(F,G) \bigcap vert\Pi_{qk}^{ns}(A,H),$ то $x \in R(F,X),$ если $x \notin R(F,G) \bigcap vert\Pi_{qk}^{ns}(A,H),$ то из этого не следует, что $x \notin R(F,X)$, где $R(F,X)$ обозначает множество $P(F,X),$ $Sm(F,X)$ или $Sl(F,X)$.

Таким образом, теоремы 1 – 4 устанавливают взаимосвязь между задачей $Z(F,X)$ и задачей $Z(F,G)$, определенной на непрерывном допустимом множестве. Это дает возможность применять классические методы непрерывной оптимизации к решению векторных комбинаторных задач на полиразмещениях и на этой основе развивать новые оригинальные методы решения, используя свойства комбинаторных множеств и их выпуклых оболочек.

Общий подход к решению векторных задач на комбинаторном множестве полиразмещений

1. Находим эффективные решения задачи $Z(F, \Pi_{qk}^{ns}(A,H))$.

2. Проверяем их на принадлежность множеству D. Если $x \in P(F, \Pi_{qk}^{ns}(A,H)) \bigcap D,$ то $x \in P(F,X).$

3. Рассмотрим допустимые решения $x \in X$ задачи $Z(F,X),$ которые являются неэффективными в задаче $Z(F, \Pi_{qk}^{ns}(A,H))$, то есть $x \in X \setminus \left(P(F, \Pi_{qk}^{ns}(A,H)) \bigcap D \right)$ и проверяем их на эффективность. Для этого воспользуемся необходимыми и достаточными условиями, сформулированными в [10].

Утверждение 1. Допустимое решение x^0 эффективно тогда и только тогда, когда оно является оптимальным решением задачи $Z^1(F,X): \max \left\{ \sum_{i=1}^{m} f_i(x) \mid x \in X,\ f_i(x) \ge f_i(x^0),\ i \in N_m \right\}.$

Если решение x^0 не эффективно, то в результате решения этой задачи находим эффективное решение x^*, которое более предпочтительно, чем x^0, т.е. $F(x^*) \ge F(x^0).$

Продолжая исследования и развивая результаты работ [1, 5, 6, 8 – 13], в данной статье предложен и обоснован подход к решению задачи $Z(F,X)$, основанный на развитии метода главного критерия для рассматриваемого класса векторных задач. Метод решения однокритериальных задач основан на идеях декомпозиции, отсекающих плоскостей Келли, релаксации, при реализации которого учитывается тот факт, что число ограничений довольно большое. Целесообразным в этом случае является использование процедуры релаксации, т. е. временного отбрасывания некоторых ограничений и решения задачи на более широкой области при оставшихся ограничениях. При построении метода решения многокритериальной задачи $Z(F,X)$ учитываются структурные особенности ее допустимой области.

При разработке метода на начальном этапе необходимо определить исходное решение, что позволит правильно выбрать активные ограничения - неравенства.

Утверждение 2. Если для элементов мультимножества A и коэффициентов $c_j,\ j\in N_n$, целевой функции задачи $\operatorname{extr}\left\{ f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \mid x\in \operatorname{vert} \Pi_{qk}^{ns}(A,H)\right\}$ выполняются соответственно условия $a_1\le a_2\le\ldots\le a_n$ и $c_{i_1}\le c_{i_2}\le\ldots\le c_{i_n}$, $i_n\in N_n$, то максимум функции $f(x)$ на допустимом множестве достигается в точке $z=(z_{i_1},\ldots,z_{i_n})\in \operatorname{vert}\Pi_{qk}^{ns}(A,H)$, которая определяется как $z_{i_j}=a_j\ \forall\ j\in N_n$,

а минимум – соответственно в точке $y=(y_{i_1},\ldots,y_{i_n})$, где $y_{i_{j+1}}=a_{n-j}\ \forall\ j\in N_{n-1}\cup\{0\}$.

Справедливость данного утверждения очевидна, так как наибольшее значение суммы попарных произведений достигается при сопоставлении возрастающей последовательности c_i и возрастающей последовательности z_i, а наименьшее значение суммы, соответственно достигается при сопоставлении возрастающей последовательности c_i и убывающей последовательности $y_i, i\in N_n$.

Для решения задачи $Z(F,X)$ необходимо учесть на начальном этапе лишь часть ограничений, которые определяют область X. Поскольку определение эффективных решений задачи $Z(F,X)$ является более важным, чем построение всего множества ограничений, описывающих допустимую область G, поэтому достаточно построить только те ограничения множества G, которые определяют эффективные решения данной задачи. Рассматриваемый здесь метод предназначен для получения таких ограничений.

Для описания и обоснования метода решения задачи введем следующие обозначения. Допустимую область задачи $Z(F,G)$ запишем в виде $G=\{x\in R^n \mid Hx\le g\}$, $g=(g_1,g_2,\ldots,g_u)$, $H\in R^{u\times n}$, H - матрица, которая используется для матрично-векторной формы записи ограничений вида (1), (2) и линейных неравенств, описывающих многогранник D, где все ограничения сведены к одному ($\le$) виду неравенств. Обозначим N_u множество, элементы которого определяют номера ограничений системы (1), (2) и дополнительных ограничений, описывающих выпуклое многогранное множество D: $N_q=\{1,2,\ldots,2^n+m\}$. Определим множества $G_i=\{x\in R^n \left| \langle h_i,x\rangle\le g_i\}, i\in N_u\right.$; $\forall\ x^s\in R^n$ определим множества $N^a(x^\nu)=\{i\in N_q \left|\left\langle h_i,x^\nu\right\rangle = g_i\}\right.$ и $N^n(x^\nu)=\{j\in N_q \left|\left\langle h_j,x^\nu\right\rangle < g_j\}\right.$ – соответственно активных и неактивных ограничений в точке x^ν; $h_i\in R^n, g_i\in R,\ i\in N_q$ - соответственно i-я вектор-строка матрицы H и $i-$я компонента вектора g. Введем в рассмотрение задачу $Z(F,G^\nu)$: $\max\left\{F(x)\mid x\in G^\nu\right\}$, где $G^\nu=\left\{x\in R^n \left|\langle h_i,x\rangle\le g_i,\ i\in Q_\nu\subset N_q\right.\right\}$, Q_ν - множество индексов ограничений, описывающих ее допустимую область на $\nu-$м шаге алгоритма, $Q_\nu=N_q\setminus R_\nu$, R_ν - множество номеров ограничений, которые не включены в эту задачу на $\nu-$м шаге.

Определение. Величина $r_i(x) = \langle h_i, x \rangle - g_i,\ i \in N_q$, называется отклонением точки $x \in R^n$ от границы множества G_i, а величина $r(x) = \max\{r_i(x) \mid i \in N_q\}$ называется отклонением точки $x \in R^n$ от границы множества G. Очевидно, что для $i \in N_p$ $r_i(x) = \sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} - \sum_{j=1}^{i} a_j^i$, а для $i \in N_q \setminus N_p$ $r_i(x) = \langle b_i, x \rangle - d_i$, где b_i - i -я вектор-строка матрицы $B,\ d_i \in R$.

Теорема 5. Эффективное (Парето-оптимальное, слабо, строго эффективное) решение x^0 задачи $Z(F, G^{\nu})$ является эффективным в том же смысле решением задачи $Z(F,G)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $r(x^0) \le 0$.

Доказательство. Необходимость утверждения очевидна, поскольку допустимое решение x^0 задачи $Z(f, G^{\nu})$ является допустимым решением задачи $Z(F,G)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $r(x^0) \le 0$. Достаточность утверждения следует из определения задачи $Z(F,G)$ и $r(x)$.

Для рассматриваемого класса векторных задач на комбинаторном множестве полиразмещений предлагается метод главного критерия. Он состоит в том, что исходная многокритериальная задача $Z(F, X)$ сводится к задаче оптимизации по одному критерию $f_r(x), r \in N_l$, который объявляется главным или основным, при условии, что значения всех остальных критериев должны быть не меньше некоторых установленных величин (пороговых значений) $t_i, i \in N_l \setminus \{r\}$. Таким образом, имеем задачу

$$Z(f_r, X(t_i)) : \max\left\{ f_r(x) \middle| f_i(x) \ge t_i, i \in N_l \setminus \{r\}, x \in X \right\}.$$

Оптимальное решение x^0 этой задачи всегда является слабо эффективным, а если оно единственно (с точностью до эквивалентности $\sim_f$), то и эффективным. Если решение x^0 эффективно, то оно является единственным (с точностью до эквивалентности $\sim_f$) решением задачи $Z(f_r, X(t_i))$ при любом фиксированном $r \in N_l$ и $t_i = f_i(x^0), i \in N_l \setminus \{r\}$. Выбор одного из критериев в качестве главного никак не уменьшает свободы выбора оптимального решения. Для определения пороговых значений $t_i,\ i \in N_l \setminus \{r\}$ воспользуемся утверждением 2, которое дает возможность установления верхних и нижних границ значений критериев $f_i(x),\ i \in N_l,$ на множестве полиразмещений. Предлагается два подхода к решению исходной задачи $Z(F, X)$. Первый состоит в назначении порогам $t_i, i \in N_l \setminus \{r\}$ максимально возможных значений критериев $f_i(x),\ i \in N_l,$ на множестве полиразмещений с последующим расширением допустимого множества задачи $Z(f_r, X)$, если исходная задача окажется недопустимой, а в случае ее допустимости нахождение эффективного либо слабо эффективного решения. Второй подход предполагает поиск оптимального решения задачи $Z(f_r, X(t_i))$ при назначении минимальных значений критериев $f_i(x),\ i \in N_l$ с последующим сужением допустимой области посредством выбора значений порогов $t_i, i \in N_l \setminus \{r\}$ следующих, упорядоченных по возрастанию, за минимальными значениями критериев. Процедура назначения серии пороговых величин t_i ограничений и в первом и во втором подходе очень проста, так как используя утверждение 2, она сводится после упорядочения коэффициентов критериев к вычислению скалярного произведения двух векторов, т.е. к определению значений линейных критериев. При этом, учитывая структурные особенности множества полиразмещений, величины t_i можно вычислять более эффективно, используя перестановки элементов каждого $i -$ го, $i \in N_s$, подмножества мультимножества A.

Общая идея предложенного метода решения задачи $Z(F,X)$ состоит в последовательном включении ограничений задачи, описывающих область допустимых решений.

Алгоритм

1. Сводим многокритериальную задачу $Z(F,G)$ к однокритериальной задаче $Z(f,G)$ методом главного критерия. Полагаем $\nu = 0.$ Выбираем главный критерий $f_r(x), r \in N_l$. На основании утверждения 2 назначаем величины t_i, $i \in \left(N_l \setminus \{r\}\right)$, для ограничений на остальные критерии. Выбираем ограничения, определяющие область $G^{\nu} \subset G,$ начальной истемы.

2. Находим оптимальное решение x^{ν} задачи $Z\left(f_r, G^{\nu}(t_i)\right)$ с помощью симплекс-метода.

3. Если полученное оптимальное решение – точка множества полиразмещений, то в найденной точке x^{ν} проверяем выполнение ограничений, которые не были учтены. Очевидно, ими могут быть лишь те ограничения, описывающие выпуклое многогранное множество *D*. Если решение x^{ν} не удовлетворяет этим ограничениям, то добавляем к ограничениям задачи $Z(f_r, G^{\nu}(t_i))$ наиболее нарушенное, из описывающих многогранник *D*. Если решение x^{ν} удовлетворяет указанным ограничениям, то оно является эффективным решением задачи $Z(F,G)$ и, следовательно, задачи $Z(F,X)$.

4. Если полученное решение x^{ν} не является точкой множества полиразмещений, то строим отсечение, проходящее через смежные вершины и отсекающую его. Прибавляем это отсечение к ограничениям задачи $Z\left(f_r, G^{\nu}(t_i)\right)$.

5. Сравниваем значение $f(x^{\nu})$ со значением целевой функции, найденным на предыдущем шаге. Если оно уменьшается, то отбрасываем неактивные (несущественные) ограничения в точке x^{ν}, иначе эти ограничения оставляем. С измененной допустимой областью задачи $Z\left(f_r, G^{\nu}(t_i)\right)$ переходим к пункту 2.

То обстоятельство, что в процессе решения задачи ограничения последовательно добавляются и ни одно из ограничений не отбрасывается, если $f(x^{\nu})$ остается равным предыдущему значению, гарантирует, что решается только конечное число задач вида $Z\left(f_r, G^{\nu}(t_i)\right)$.

Выводы

В статье исследованы сложные комбинаторные многокритериальные задачи на множестве полиразмещений. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности различных видов эффективных решений. На основе структурных свойств допустимой области, погруженной в арифметическое евклидово пространство, построен и обоснован метод решения рассмотренного класса задач. Разработанный подход может успешно применяться для решения векторных задач на комбинаторном множестве полиразмещений и предоставляет возможность исследовать и находить элементы множества Парето-оптимальных решений многокритериальных комбинаторных задач с учетом других комбинаторных свойств области допустимых решений. Дальнейшее развитие данной работы будет направлено на реализацию и адаптацию предложенного алгоритма, а также на разработку новых методов решения векторных задач комбинаторной оптимизации.

Библиография

[1] Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – К.: Наук. думка, 1988. – 472 с.

[2] Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – Киев – Наук. думка, 1981. – 287 с.

[3] Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. – К.: Наук. думка, 2003. –264 с.

[4] Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. – Киев: Наук. думка, 1995. – 170 с.

[5] Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 2000. - №6 – С. 39 – 46.

[6] Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І., Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Доповіді НАНУ. – 2003. – №10 – С. 80–85.

[7] Лебедева Т.Т., Семенова Н.В Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – №4 – С. 90–100.

[8] Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ – 2008. – №3 – С. 158–172.

[9] N.V. Semenova, L.M. Kolechkina, A.M. Nagirna. Vector combinatorial problems in a space of combinations with linear fractional functions of criteria // Intern. Journal "Information Theories and Applications", 15. – 2008. – P. 240 – 245.

[10] Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето–оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

[11] Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – Киев: Наук. думка, 1986. – 265 с.

[12] Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. –188 с.

[13] Ємець О. О., Колєчкіна Л. М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями.– К.: Наукова думка. – 2005.– 118 с.

[14] Ємець О.О., Роскладка О.В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язання. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. – 130с.

Информация об авторе

***Наталия Владимировна Семенова** – Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, 03680 МСП Киев 187, проспект академика Глушкова, 40, Украина; e-mail: nvsemenova@meta.ua*